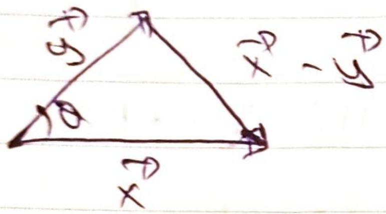
(*) $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E: \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle =$
$= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 -$
$- 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cos(\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}))$

<u>Άρα</u>: $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}))$

<u>Νόμος Συνημιτόνων</u>



16/4/18

Ένα διάνυσμα $\vec{x} \in E$ καλείται <u>μοναδιαίο</u> $\Leftrightarrow$ $\|\vec{x}\| = 1$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: Αν $\vec{x} \in E$ και $\vec{x} \neq \vec{0}$, τότε το διάνυσμα: $\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ είναι μοναδιαίο, διότι:

$$\left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right\|^2 = \left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right\rangle = \frac{1}{\|\vec{x}\|^2} \cdot \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle =$$
$$= \frac{1}{\|\vec{x}\|^2} \cdot \|\vec{x}\|^2 = 1 \Rightarrow \left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right\| = 1$$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Ένα σύνολο διανυσμάτων $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\nu\} \subseteq E$ καλείται:

(1) <u>Ορθογώνιο</u> $\Leftrightarrow \langle \vec{x}_i, \vec{x}_j > 0, \ \forall\, 1 \leq i \neq j \leq \nu$

(2) <u>Ορθοκανονικό</u> $\Leftrightarrow \langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ το σύνολο $\{\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}\}$ είναι ορθογώνιο και αποτελείται από μοναδιαία διανύσματα

ΠΡΟΤΑΣΗ: κάθε ορθογώνιο σύνολο μη-μηδενικών διανυσμάτων είναι Γ. Α.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω $C = \{\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}\}$ ορθογώνιο σύνολο μη-μηδενικών διανυσμάτων

Τότε: $\forall i = 1, \dots, n: \|\vec{x_i}\| \neq 0$.

Έστω ότι $\lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_n \vec{x_n} = \vec{0}$. Τότε: $\forall i = 1, \dots, n$:

$\langle \lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_n \vec{x_n}, x_i \rangle = \langle \vec{0}, \vec{x_i} \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 \cancel{\langle \vec{x_1}, \vec{x_i} \rangle}^{0} + \lambda_2 \cancel{\langle \vec{x_2}, \vec{x_i} \rangle}^{0} + \dots + \lambda_i \langle \vec{x_i}, \vec{x_i} \rangle + \dots + \lambda_n \cancel{\langle \vec{x_n}, \vec{x_i} \rangle}^{0} = 0$

Επειδή το σύνολο C: ορθογώνιο: $\langle \vec{x_j}, \vec{x_i} \rangle = 0$, $\forall j \neq i$, και άρα: $\lambda_i \langle \vec{x_i}, \vec{x_i} \rangle = 0 \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \lambda_i \|\vec{x_i}\|^2 = 0 \\ \|\vec{x_i}\| \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_i = 0$

Άρα το σύνολο C είναι Γ. Α.

ΠΟΡΙΣΜΑ: κάθε ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων σε έναν Ευκλείδειο χώρο είναι Γ. Α.

ΠΟΡΙΣΜΑ: Έστω $(E, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος, με: $\dim_{\mathbb{R}} E = n$. Τότε κάθε:

(α) Ορθογώνιο σύνολο n μη-μηδενικών διανυσμάτων

(β) Ορθοκανονικό σύνολο n- διανυσμάτων

είναι βάση του E.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $C = \{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}\}$: ορθογώνιο σύνολο μη-μηδενικών διανυσμάτων, τότε το σύνολο: $A = \left\{ \frac{\vec{x_1}}{\|\vec{x_1}\|}, \frac{\vec{x_2}}{\|\vec{x_2}\|}, \dots, \frac{\vec{x}}{\|\vec{x_n}\|} \right\}$ είναι

ορθοκανονικό.
Προφανώς κάθε διάνυσμα του συνόλου A είναι μοναδιαίο.

$\left\langle \frac{\vec{x_i}}{\|\vec{x_i}\|}, \frac{\vec{x_j}}{\|\vec{x_j}\|} \right\rangle = \frac{1}{\|\vec{x_i}\| \cdot \|\vec{x_j}\|} \langle \vec{x_i}, \vec{x_j} \rangle = 0, \forall i \neq j,$

διότι το C: ορθογώνιο. Άρα το σύνολο A: ορθοκανονικό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: 1 Στον Ευκλείδειο Χώρο $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ η κανονική βάση $B = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$, όπου $\vec{e_i} = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-θέση}}}{1}, \dots 0)$, $1 \leq i \leq n$, είναι

ορθοκανονικό σύνολο.

$$\forall i, j = 1, \dots, n : \langle \vec{e_i}, \vec{e_j} \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Άρα το B: ορθοκανονικό

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ GRAM-SCHMIDT: Έστω $\vec{x_1}, \vec{x_2}$: Γραμμικά Ανεξάρτητα διανύσματα του Ευκλείδειου Χώρου Ε. Θέλουμε να ~~κατασκευάσ~~ κατασκευάσουμε ένα ζεύγος Γ.Α. διανυσμάτων $\vec{y_1}, \vec{y_2}$: $\langle \vec{y_1}, \vec{y_2} \rangle = 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in E$ και $\vec{y} \neq \vec{0}$. Τότε η ορθογώνια προβολή του $\vec{x}$ στο $\vec{y}$ είναι το διάνυσμα: $\Pi_{\vec{y}}(\vec{x}) = \dfrac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle} \cdot \vec{y}$

Τότε: $\langle \vec{x} - \Pi_{\vec{y}}(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - \langle \Pi_{\vec{y}}(\vec{x}), \vec{y} \rangle =$

$= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - \left\langle \dfrac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle} \vec{y}, \vec{y} \right\rangle =$

$= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - \dfrac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\cancel{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle}} \cdot \cancel{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$

Άρα: $\vec{x} - \Pi_{\vec{y}}(\vec{x}) \perp \vec{y}$

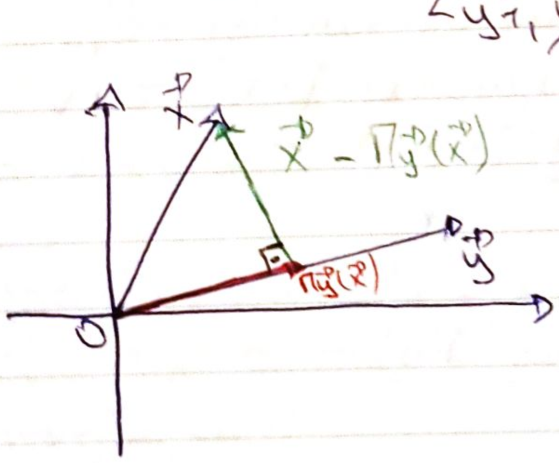
Θέτουμε: $\vec{y_1} = \vec{x_1}$
$\vec{y_2} = \vec{x_2} - \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_2})$

. Τότε όπως δείξαμε: $\vec{y_2} \perp \vec{y_1}$, διότι:

$\langle \vec{y_2}, \vec{y_1} \rangle = \langle \vec{y_2} - \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_2}), \vec{y_1} \rangle =$

$= \langle \vec{x_2}, \vec{y_1} \rangle - \left\langle \dfrac{\langle \vec{x_2}, \vec{y_1} \rangle}{\langle \vec{y_1}, \vec{y_2} \rangle} \cdot \vec{y_1}, \vec{y_1} \right\rangle =$

$= \langle \vec{x_2}, \vec{y_1} \rangle - \dfrac{\langle \vec{x_2}, \vec{y_1} \rangle}{\cancel{\langle \vec{y_1}, \vec{y_1} \rangle}} \cdot \cancel{\langle \vec{y_1}, \vec{y_1} \rangle} = 0$



$\longrightarrow$

• $\vec{y_1} = \vec{x_1} \neq \vec{0}$, διότι το $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}\}$: Γ.Α.

• $\vec{y_2} \neq \vec{0}$, διότι διαφορετικά: $\vec{y_2} = \vec{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{x_2} = \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_2}) = \frac{\langle \vec{x_2}, \vec{y_1} \rangle}{\langle \vec{y_1}, \vec{y_1} \rangle} \cdot \vec{y_1} =$$

$$= \frac{\langle \vec{x_2}, \vec{y_1} \rangle}{\langle \vec{y_1}, \vec{y_1} \rangle} \cdot \vec{x_1}$$

• Τα διανύσματα $\vec{y_1}, \vec{y_2}$: Γ.Α., διότι αν:

$$\lambda_1 \vec{y_1} + \lambda_2 \vec{y_2} = 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \vec{x_1} + \lambda_2 \cdot \left(\vec{x_2} - \frac{\langle \vec{x_2}, \vec{x_1} \rangle}{\langle \vec{x_1}, \vec{x_1} \rangle} \cdot \vec{x_1} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\lambda_1 - \lambda_2 \frac{\langle \vec{x_2}, \vec{x_1} \rangle}{\langle \vec{x_1}, \vec{x_1} \rangle} \right) \vec{x_1} + \lambda_2 \cdot \vec{x_2} = 0$$

Επειδή $\vec{x_1}, \vec{x_2}$: Γ.Α. $\Rightarrow \lambda_2 = 0$ και $\lambda_1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\vec{y_1}, \vec{y_2}\}$: Γ.Α.

Έστω $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}\}$: Γ.Α. σύνολο διανυσμάτων. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα Γ.Α. ορθογώνιο σύνολο $\{\vec{y_1}, \vec{y_2}, \vec{y_3}\}$.

Θέτουμε:

• $\vec{y_1} = \vec{x_1}$

• $\vec{y_2} = \vec{x_2} - \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_2})$

• $\vec{y_3} = \vec{x_3} - \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_3}) - \Pi_{\vec{y_2}}(\vec{x_3})$. Θα δείξουμε ότι το $\{\vec{y_1}, \vec{y_2}, \vec{y_3}\}$ είναι ορθογώνιο και $\vec{y_1} \neq \vec{0}$, $\vec{y_2} \neq \vec{0}$, $\vec{y_3} \neq \vec{0}$ και τότε σύμφωνα με την ΠΡΟΤΑΣΗ, το $\{\vec{y_1}, \vec{y_2}, \vec{y_3}\}$: Γ.Α.

ΘΔΟ: $\vec{y_1} \neq \vec{0}$, $\vec{y_2} \neq \vec{0}$, $\vec{y_3} \neq \vec{0}$

$\vec{y_1} \perp \vec{y_2}$, $\vec{y_1} \perp \vec{y_3}$, $\vec{y_2} \perp \vec{y_3}$

$\rightarrow$

① $\vec{y_1} = \vec{x_1} \neq \vec{0}$, διότι $\vec{x_1} \in \{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}\}$: Γ.Α.
$\vec{y_2} \neq \vec{0}$, διότι αν $\vec{y_2} = \vec{0}$, τότε: όπως είδαμε, $\vec{x_1}, \vec{x_2}$: Γ.Ε. άτοπο

• Έστω ότι $\vec{y_3} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x_3} = \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_3}) + \Pi_{\vec{y_2}}(\vec{x_3}) =$

$$= \frac{\langle \vec{x_3}, \vec{y_1} \rangle}{\langle \vec{y_1}, \vec{y_1} \rangle} \vec{y_1} + \frac{\langle \vec{x_3}, \vec{y_2} \rangle}{\langle \vec{y_2}, \vec{y_2} \rangle} \vec{y_2} =$$

$$= \frac{\langle \vec{x_3}, \vec{y_1} \rangle}{\langle \vec{y_1}, \vec{y_1} \rangle} \vec{x_1} + \frac{\langle \vec{x_3}, \vec{y_2} \rangle}{\langle \vec{y_2}, \vec{y_2} \rangle} \left(\vec{x_2} - \frac{\langle \vec{x_2}, \vec{y_1} \rangle}{\langle \vec{y_1}, \vec{y_1} \rangle} \vec{x_1} \right) =$$

$$= \left(\frac{\langle \vec{x_3}, \vec{y_1} \rangle}{\langle \vec{y_1}, \vec{y_1} \rangle} - \frac{\langle \vec{x_2}, \vec{y_1} \rangle}{\langle \vec{y_1}, \vec{y_1} \rangle} \cdot \frac{\langle \vec{x_3}, \vec{y_2} \rangle}{\langle \vec{y_2}, \vec{y_2} \rangle} \right) \vec{x_1} +$$

$$+ \frac{\langle \vec{x_3}, \vec{y_2} \rangle}{\langle \vec{y_2}, \vec{y_2} \rangle} \vec{x_2} \Rightarrow \{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}\}: \text{Γ.Ε. άτοπο},$$

διότι $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}\}$: Γ.Α.

② Έχουμε δείξει ότι: $\vec{y_1} \perp \vec{y_2}$.

$$\langle \vec{y_3}, \vec{y_1} \rangle = \left\langle \vec{x_3} - \frac{\langle \vec{x_3}, \vec{y_1} \rangle}{\langle \vec{y_1}, \vec{y_1} \rangle} y_1 - \frac{\langle \vec{x_3}, \vec{y_2} \rangle}{\langle \vec{y_2}, \vec{y_2} \rangle} y_2, \vec{y_1} \right\rangle =$$

$$= \langle \vec{x_3}, \vec{y_1} \rangle - \frac{\langle \vec{x_3}, \vec{y_1} \rangle}{\cancel{\langle \vec{y_1}, \vec{y_1} \rangle}} \cdot \cancel{\langle \vec{y_1}, \vec{y_1} \rangle} - \frac{\langle \vec{x_3}, \vec{y_2} \rangle}{\langle \vec{y_2}, \vec{y_2} \rangle} \cdot \cancelto{0}{\langle \vec{y_2}, \vec{y_2} \rangle} =$$

$$= \langle \vec{x_3}, \vec{y_1} \rangle - \langle \vec{x_3}, \vec{y_1} \rangle = 0 \quad \text{Άρα: } \boxed{\vec{y_1} \perp \vec{y_3}}$$

$$\langle \vec{y_3}, \vec{y_2} \rangle = \left\langle \vec{x_3} - \frac{\langle \vec{x_3}, \vec{y_1} \rangle}{\langle \vec{y_1}, \vec{y_1} \rangle} \vec{y_1} - \frac{\langle \vec{x_3}, \vec{y_2} \rangle}{\langle \vec{y_2}, \vec{y_2} \rangle} \vec{y_2}, \vec{y_2} \right\rangle =$$

$$= \langle \vec{x_3}, \vec{y_2} \rangle - \frac{\langle \vec{x_3}, \vec{y_2} \rangle}{\langle \vec{y_1}, \vec{y_1} \rangle} \cancelto{0}{\langle \vec{y_1}, \vec{y_2} \rangle} - \frac{\langle \vec{x_3}, \vec{y_2} \rangle}{\cancel{\langle \vec{y_2}, \vec{y_2} \rangle}} \cdot \cancel{\langle \vec{y_2}, \vec{y_2} \rangle} =$$

$$= \langle \vec{x_3}, \vec{y_2} \rangle - \langle \vec{x_3}, \vec{y_2} \rangle = 0$$

Άρα $\vec{y_2} \perp \vec{y_3}$. Άρα το $\{\vec{y_1}, \vec{y_2}, \vec{y_3}\}$: ορθογώνιο σύνολο αποτελούμενο από μη-μηδενικά διανύσματα.

$\rightarrow$

Άρα: αν το σύνολο $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}\}$: βάση, τότε το σύνολο $\{\vec{y_1}, \vec{y_2}, \vec{y_3}\}$ είναι μια ορθογώνια βάση και το σύνολο $\left\{\frac{\vec{y_1}}{\|\vec{y_1}\|}, \frac{\vec{y_2}}{\|\vec{y_2}\|}, \frac{\vec{y_3}}{\|\vec{y_3}\|}\right\}$ είναι ορθοκανονική βάση.

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ GRAM-SCHMIDT: Έστω $B=\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots \vec{x_k}\}$: βάση του E.
Θέτοντας:

- $\vec{y_1} = \vec{x_1}$
- $\vec{y_2} = \vec{x_2} - \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_2})$
- $\vec{y_3} = \vec{x_3} - \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_3}) - \Pi_{\vec{y_2}}(\vec{x_3})$

$\vdots$

- $\vec{y_k} = \vec{x_k} - \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_k}) - \Pi_{\vec{y_2}}(\vec{x_k}) - \ldots - \Pi_{\vec{y}_{k-1}}(\vec{x_k})$

Τότε το σύνολο $B' = \{\vec{y_1}, \vec{y_2}, \ldots, \vec{y_k}\}$ είναι ορθογώνια βάση του E και το σύνολο $B'' = \left\{\frac{\vec{y_1}}{\|\vec{y_1}\|}, \frac{\vec{y_2}}{\|\vec{y_2}\|}, \ldots, \frac{\vec{y_k}}{\|\vec{y_k}\|}\right\}$ είναι ορθοκανονική βάση του E.

ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ: Αν $\{\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_k}\}$: Γ.Α τότε το σύνολο $\{\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_k}\}$ είναι ένα ορθογώνιο σύνολο μη-μηδενικών διανυσμάτων, όπου: (*)
$1 \le r \le k$: $\vec{y_r} = \vec{x_r} - \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_r}) - \Pi_{\vec{y_2}}(\vec{x_r}) - \ldots - \Pi_{\vec{y}_{r-1}}(\vec{x_r})$